di Torino
FI. A
97

RICORDO del Professore Commendatore **Giuseppe Domenico Botto** al Gabinetto di Fisica dell' Università di Torino dato dal Nipote ed Erede GIAMBATTISTA BOTTO di Parma.

228

SUR LA TORSION

DES FILS MÉTALLIQUES

ET

SUR L'ÉLASTICITÉ DES RESSORTS EN HÉLICES

PAR

CH. IGN. GIULIO

R. Università di Torino
ISTITUTO DI FISICA

TURIN

DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1841.

BOTTO Pre 61V
R.L.A. 8272
Precisazione inventario: 1V. = Sul contropiatto ant.: etichetta di dono (Fondo Botto)

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin,
SÉRIE II. TOME IV.

SUR LA TORSION

DES FILS MÉTALLIQUES

ET

SUR L'ÉLASTICITÉ DES RESSORTS EN HÉLICES

PAR

CH. IGN. GIULIO

Les lois de la torsion des fils métalliques découvertes expérimentalement par Coulomb découlent aujourd'hui, grâce aux travaux de plusieurs Géomètres, comme autant de corollaires, de la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques considérés comme des assemblages de molécules disjointes et sollicitées par leurs attractions et leurs répulsions mutuelles. Les principales conséquences auxquelles ces Géomètres sont parvenus, confirmées encore par les expériences des Physiciens les plus exacts sur la torsion des verges de matière et de figure différentes, doivent être regardées comme définitivement acquises à la science et comme rigoureusement exactes, tant que l'on se borne à ne considérer que les torsions produites par des forces très-petites relativement à la rigidité et aux dimensions des verges, ou telles du moins que l'élasticité de celles-ci n'en soit aucunement altérée. Parmi les résultats auxquels Poisson a été conduit par son analyse, l'un des plus remarquables sans doute consiste dans le rapport très-simple découvert par ce grand Géomètre entre les grandeurs de

l'extension et de la torsion d'une même verge élastique, et d'où il a pû conclure que les nombres des vibrations longitudinales et des vibrations tournantes exécutées dans des temps égaux par une verge cylindrique doivent, quelles que soient les dimensions et la matière de cette verge, être entr'eux dans un rapport constant dont il assigne la valeur; cette valeur se trouve en effet sensiblement égale à celles que l'on déduit de quelques expériences acoustiques de Chladni et de Savart, qui ne s'en écartent que d'un vingtième environ, l'une en défaut, l'autre en excès. La comparaison des expériences directes sur la résistance à l'extension et sur la résistance à la torsion devrait conduire au même résultat: cependant, en partant des expériences de de M.r Duleau sur des barres de fer forgé, on trouve une valeur sensiblement différente de celle que fournit la théorie: quelle que soit la cause de cette différence, il était intéressant de revenir sur cette comparaison: c'est ce que j'ai taché de faire au moyen des expériences sur la torsion des fils de fer que je rapporte dans le premier paragraphe de ce mémoire. En comparant la valeur du moment de torsion de ces fils, avec celle de leur résistance à l'extension telle que je l'ai déduite des expériences publiées dans mon mémoire *sur la force des fils de fer*, je parviens à un résultat compris entre ceux de Chladni et de Savart, et qui par conséquent se rapproche encore davantage de la valeur que Poisson a tiré de son analyse, la différence se reduisant à un vingt-septième seulement de cette valeur. Cette différence d'ailleurs s'explique d'une manière assez probable par des considérations que je rapporte en détail.

Malgré les nombreux travaux des Géomètres et des Physiciens sur l'élasticité et sur la résistance des solides, il reste beaucoup à faire pour compléter cette intéressante partie de la philosophie naturelle. Sans parler ici des difficultés, souvent insurmontables, que présente l'application des principes fournis par la théorie et par l'expérience à des corps hétérogènes, ou inégalement échauffés, ou dont la forme diffère de celles qui ont été considérées jusqu'ici, et qui sont fort peu nombreuses et, en général, fort simples, nos connaissances sont très-bornées encore, soit sur les valeurs des coefficiens spécifiques que l'expérience doit fournir au calcul pour chaque substance et pour chaque état où une même substance se présente à nous, soit sur les loi d'après lesquelles la constitution moléculaire des corps élastiques se modifie par

l'effet de l'application de forces extérieures considérables, ou dont l'action se prolonge assez long temps.

Les changemens de dimensions et de forme produits par l'action des forces extérieures sur les corps dont la rigidité est la plus grande, et dont nos arts tirent par conséquent le plus grand parti, sont en général très-petits, et par conséquent très-difficiles à bien mesurer. Il s'ensuit que les expériences par lesquelles on se propose d'assigner la grandeur de ces changemens exigent en général des soins minutieux et pénibles, et ne peuvent être conduites qu'à l'aide d'appareils où la force s'allie à une grande sensibilité et à une grande précision. Malgré l'intérêt qui s'attache à tout ce qui peut jeter quelque lumière sur la constitution physique des corps, de telles expériences sont loin de présenter un attrait qui puisse dédommager des peines qu'elles donnent, et surtout du temps qu'elles exigent. On rendrait donc à la science un véritable service en proposant des moyens simples et faciles de mesurer avec une exactitude suffisante les petits changemens de forme et de dimension. La Balance de Torsion de Coulomb en est un exemple remarquable; et cependant cet instrument précieux, dont la physique a tiré de si grands avantages, devient d'un usage très-embarassant lorsque l'on veut expérimenter sur des fils d'un diamètre un peu fort. Ces considérations suffiront pour montrer le but que je me suis proposé dans le second paragraphe de ce mémoire, où je m'occupe de l'élasticité des ressorts en hélices connus dans les arts sous la dénomination de *ressorts à boudin*. Après avoir formé l'équation d'équilibre d'une hélice élastique tendue ou comprimée par une force dirigée suivant son axe, ou tordue par des forces perpendiculaires à cette droite, je rapporte quelques expériences faites sur des hélices formées avec des fils de fer, de cuivre et de laiton, soit pour déterminer la constante de l'élasticité de ces métaux, soit pour entamer quelques recherches sur les altérations de cette élasticité. La simplicité de ces expériences qui n'exigent pour ainsi dire aucun appareil, et l'accord des résultats qu'elles donnent avec ceux qui ont été autrement obtenus par les expérimentateurs les plus habiles, me font croire que l'emploi des ressorts en hélices pourra fournir aux Physiciens un moyen aussi exact que commode de poursuivre les recherches expérimentales sur l'élasticité des corps solides. Ce moyen m'a permis de mettre hors de doute, et de donner plus d'étendue à une loi remarquable, qui ne paraît pas

encore avoir reçu l'assentiment de tous les Physiciens. C'est à ces titres seulement que j'espère que l'Académie voudra accueillir avec indulgence un travail très-incomplet, et dont je désire pouvoir lui soumettre un jour des résultats plus dignes de fixer son attention.

§ I.er

Expériences sur la torsion des fils de fer.

1. La balance de torsion qui a servi pour ces expériences était établie de la manière suivante. Une pince à vis fixée au plafond retenait l'extrémité supérieure du fil dont on voulait éprouver l'élasticité: l'extrémité inférieure de ce fil soutenait, au moyen d'une autre pince à vis, et à quelques centimètres au-dessus du plancher, un balancier horizontal et cylindrique en bois de frêne, de $0^m,082$ de diamètre et $1^m,689$ de longueur. Un anneau ouvert formé d'une forte bande de fer de $0^m,045$ de largeur et $0^m,004$ d'épaisseur pouvait se mouvoir le long du cylindre et se fixer en un point quelconque de sa longueur, en serrant une vis qui traversait les extrémités de la bande, repliées selon les prolongemens de deux rayons. C'est sur cet anneau qu'était fixée par des vis la pince où l'extrémité inférieure du fil se trouvait engagée. On avait ménagé à cette pince un leger mouvement dans le sens perpendiculaire à l'axe du balancier, mouvement qui combiné avec celui de l'anneau le long du balancier permettait d'ajuster l'appareil une fois pour toutes, de manière que le balancier suspendu par le fil se tînt bien horizontal, et fît des oscillations parfaitement planes.

Il était nécessaire pour déterminer le moment d'inertie du balancier, de pouvoir le faire osciller aussi en guise de pendule, en le suspendant à un axe horizontal: à cet effet on avait fixé à l'une de ses extrémités un couteau en acier, dont la tranche, perpendiculaire à l'axe du cylindre et verticale pendant les expériences sur la torsion, se trouvait alors éloignée de $0^m,680$ du fil de suspension.

Le balancier garni de son anneau et du couteau dont je viens de parler pesait $8^{kil.},66$: les expériences ayant toutes été faites dans deux jours seulement (28 et 29 octobre 1840), le poids ni les dimensions

du balancier n'ont pû varier sensiblement dans un si court intervalle. Ce poids était suffisant pour tenir tendus en ligne droite des fils de fer de un millimètre et demi de diamètre: mais je n'aurais pû étendre les expériences à des fils d'un diamètre plus fort, sans employer un balancier beaucoup plus pesant. C'est pourquoi j'ai borné mes expériences à des fils des N.ºs 5 et 10 pour la fabrique de Pont Bozet; des N.ºs 5bis et 10 pour celle de Pont, et des N.ºs 8 et 10 pour la fabrique étrangère de Bienne.

Les portions de fils que j'ai employées sont identiquement les mêmes qui m'avaient servi, lors de mes premières expériences sur la force des fils de fer (1), à déterminer au moyen de leurs poids les diamètres correspondants aux numéros qui servent dans le commerce à en désigner la grosseur. La longueur du fil de suspension a varié entre $3^m,164$ et $3^m,343$: dans chaque expérience je prenais la moyenne entre les longueurs fournies par deux mesures différentes prises, l'une directement entre les deux pinces où les extrémités du fil se trouvaient serrées, l'autre en rapportant la position de la pince inférieure à un point de repère fixé sur le plancher. Il n'était point nécessaire d'ailleurs de déterminer la longueur du fil avec la dernière exactitude, une erreur de un millimètre et même plus sur cette longueur ne produisant sur le résultat final qu'une différence insignifiante.

2. La lenteur du mouvement du balancier, surtout vers ses élongations extrêmes, ne permettant pas de saisir avec précision l'instant du commencement de chaque oscillation, on observait celui du passage du balancier par sa position d'équilibre: mais comme il aurait été beaucoup trop long pour déterminer cette position, d'attendre avant de commencer une expérience qu'il se fût réduit au repos, ou à ne faire plus que des oscillations peu sensibles, je parvenais au même but de la manière suivante. J'observais et je marquais sur le plancher les points où l'extrémité du balancier paraissait s'arrêter un instant à la fin de trois demi-oscillations successives: je marquais ensuite la position moyenne entre celui de ces points qui se trouvait seul d'un côté, et le milieu des deux qui se trouvaient au terme opposé des arcs décrits par le balancier: cette position moyenne ne pouvait différer sensiblement de la position d'équilibre.

---

(1) V. Mém. de l'Acad. des Sc. de Turin. Deuxième série. T. III.

Je faisais sur chaque fil une ou plusieurs séries d'observations, en notant au moyen d'un chronomètre bien réglé les instants d'un nombre impair de passages. Chaque série était ordinairement de neuf passages, ou de huit oscillations, et durait de six à dix-huit minutes, temps bien suffisant pour que l'erreur commise sur les instants du commencement et de la fin de l'observation ne pût avoir qu'une influence peu considérable sur des résultats qui dépendent d'ailleurs de plusieurs autres élémens tels que le diamètre du fil et le moment d'inertie du balancier, sur lesquels il est assez difficile de ne point commettre des erreurs bien autrement importantes. On ne peut d'ailleurs prolonger chaque série d'oscillations au-delà d'un certain terme: car à mesure que leur amplitude diminue, soit à cause de la résistance de l'air, soit à cause de celle que les molécules mêmes du fil éprouvent à se mouvoir, la vitesse avec laquelle le balancier passe par la position d'équilibre devenant de plus en plus petite, il devient bientôt impossible d'éviter sur l'instant du passage une incertitude qui fait plus que compenser l'avantage que l'on trouverait à augmenter le nombre des oscillations de la série. Il est à remarquer encore que le *point neutre*, ou *centre de réaction du fil*, c'est-à-dire le point où sa réaction élastique est nulle, ne correspond pas, de beaucoup s'en faut, à une position invariable et bien déterminée du balancier: en effet, soit à cause des changemens qui peuvent survenir quelquefois pendant la durée d'une expérience dans la constitution intime du fil, soit surtout à cause des oscillations coniques du fil autour de la verticale, oscillations qu'il est impossible d'empêcher entièrement, et qui viennent avec une période toute différente se superposer à celles qui sont dues à la réaction élastique, il arrive que la vitesse et la position absolue du balancier qui correspondent aux instants où cette réaction est nulle varient d'une oscillation à l'autre d'une manière, dont l'influence est d'autant plus sensible, que l'amplitude des oscillations est plus petite.

3. Le Tableau I.er contient pour chacune des douze expériences que j'ai faites ainsi les valeurs du rayon et de la longueur du fil, ainsi que de la durée des oscillations. En nommant r, l et T ces trois quantités, et π le rapport de la circonférence au diamètre, et en désignant par G une quantité dont la valeur dépend de la nature du fil, et par S le moment d'inertie du balancier relativement à l'axe du fil, on sait que l'on doit avoir

$$T=\frac{\pi}{r^2}\sqrt{\frac{lS}{G}},$$

d'où l'on tire

$$G=\frac{\pi^2 l S}{r^4 T^2}.$$

Soit maintenant Σ le moment d'inertie du balancier relativement à un axe parallèle à celui auquel se rapporte le moment S et conduit à la distance b de celui-ci : on aura

$$S=\Sigma-\frac{b^2 P}{g},$$

en désignant par P le poids du balancier, et par g la valeur de la gravité.

Soit encore θ la durée d'une oscillation du balancier suspendu en guise de pendule par l'axe auquel se rapporte le moment Σ, on aura aussi

$$\Sigma=\frac{\theta^2}{\pi^2}.Pb,$$

d'où l'on conclut

$$S=Pb\left(\frac{\theta^2}{\pi^2}-\frac{b}{g}\right),$$

et par suite

$$G=\frac{Pbl}{r^4 T^2}\left(\theta^2-\frac{\pi^2 b}{g}\right).$$

Lorsque la distance b n'aura point varié sensiblement dans toute une série d'expériences faites avec le même balancier, les quantités π, g, P, b, et θ étant constantes, on calculera une fois pour toutes la valeur du produit

$$Pb\left(\theta^2-\frac{\pi^2 b}{g}\right)=h,$$

et l'on aura, pour déterminer la valeur de G d'après chaque expérience, la formule

$$G=\frac{hl}{r^4 T^2}.$$

Cette quantité G dont la valeur doit se conserver sensiblement constante pour des fils de même matière quels que soient leur rayons et leurs longueurs exprime, comme on sait, la valeur du moment d'une force qui serait capable de produire dans un fil de rayon et de longueur égaux à l'unité, une torsion mesurée par l'arc dont la longueur est égale au rayon.

4. Dans nos expériences, en prenant pour unités le millimètre, le kilogramme et la seconde sexagésimale, on doit faire

$$b = 680 \ , \qquad P = 8{,}66 \ , \qquad g = 9809 \ .$$

Quant au temps θ, j'ai trouvé par la moyenne de quatre séries d'oscillations, que le balancier suspendu par son couteau employait $927''$ a faire 900 oscillations, ce qui donne

$$\theta = 1'',03 \ .$$

Avec ces valeurs on trouve

$$h = 2220 \ ,$$

et par conséquent on aura

$$G = \frac{2220 \, . \, l}{r^4 T^2} \ .$$

C'est au moyen de cette formule que j'ai calculé les nombres de la quatrième colonne du Tableau II.e, où l'on voit que la valeur de G se conserve sensiblement constante pour les fils d'une même fabrique: cette valeur est à-peu-près la même pour les fils de Pont-Bozet et de Pont, et d'un cinquième en sus environ plus forte pour les fils de Bienne. On remarquera cependant qu'à une seule exception près la valeur de G diminue un peu lorsque le rayon du fil augmente, conformément à ce qui a lieu pour la resistance des fils à l'extension. La moyenne entre toutes les valeurs de G contenues dans ce Tableau est de 11304 kilogr. avec un bras de levier de un millimètre.

Coulomb évaluait, d'après ses propres expériences, la résistance à la torsion d'un fil de fer de neuf pouces de longueur et de $\frac{1}{15^e}$ de ligne de diamètre, à un poids de $\frac{1}{715^e}$ de livre appliqué à l'extrémité

d'un bras de levier d'une ligne, et multiplié par l'angle de torsion (1). En réduisant ces données en nouvelles mesures métriques on en déduit pour G la valeur 11766 kilogr. avec un bras de levier d'un millimètre; ce qui diffère à peine de la valeur moyenne à laquelle mes expériences me conduisent.

5. Il existe un rapport fort simple découvert par Poisson (2) entre la valeur de la force G, qui agissant à l'extremité d'un bras de levier égal à l'unité, sur un fil dont la longueur et le rayon sont aussi égaux à l'unité, y produirait une torsion mesurée par un arc égal au rayon, et celle de la tension E, qui agissant sur un fil de même matière et de section égale à l'unité superficielle, y produirait un allongement égal à la longueur naturelle du fil, en supposant toutefois qu'une telle extension fût possible et toujours proportionnelle à la force qui la produit. En effet, en partant de la considération des actions moléculaires pour en déduire les équations de l'équilibre et du mouvement d'une verge élastique dans le cas où son axe ne prend aucune courbure, ce grand Géomètre a demontré qu'en nommant l la longueur de la verge, ω sa section, ϖ la force qui tend la verge, et α son extension, on doit avoir

$$\alpha = \frac{2l\varpi}{5K\omega}.$$

D'autre part en supposant que la verge soit un cylindre du rayon ε, et en désignant par Ψ l'angle qui exprime la torsion que lui fait éprouver une force dont le moment est M, Poisson parvient à la valeur

$$\Psi = \frac{2lM}{\pi K\varepsilon^4};$$

la quantité K a la même signification dans ces deux formules, et remplace, comme on sait, une somme qui ne dépend que de la forme de la fonction de la distance qui exprime la loi des actions moléculaires, et de la valeur de l'intervalle moyen des molécules dans la matière de la verge. En supposant $\alpha = l$ et $\omega = 1$, la première formule doit

(1) Théorie des machines simples. Paris 1821. pag. 233.
(2) Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France. Tom. VIII. 1829.

donner $\varpi = E$: et en supposant $\Psi = l$, $\varepsilon = 1$ la seconde formule doit donner $M = G$: on aura donc

$$E = \frac{5K}{2}, \qquad G = \frac{\pi K}{2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\pi E}{G} = 5 .$$

Cette relation nous fournit le moyen de comparer les valeurs de G rapportées dans le Tableau II.e, avec celles que les expériences antérieures sur l'extension des mêmes fils de fer m'avaient donné pour E. Le Tableau III.e contient les élémens et les résultats de cette comparaison, et l'on voit par les nombres de la colonne 5.e que les valeurs du rapport $\frac{\pi E}{G}$ (en omettant celle qui correspond aux fils de Pont-Bozet n.° 5 et qui est evidemment fautive) sont toutes comprises entre 4,3 et 4,8 ; et que leur moyenne 4,619 s'écarte de moins que d'un treizième de la valeur théorique 5. Cet écart peut s'expliquer de plusieurs manières, sans même recourir à une différence dans l'élasticité du fil selon son axe et selon son rayon : en effet :

1.° Dans les expériences sur les extensions la valeur de E se détermine au moyen d'une formule qui contient au dénominateur le carré du rayon du fil : tandis que la formule correspondante pour déduire la valeur de G des expériences sur la torsion contient au dénominateur la quatrième puissance du même rayon. Toute erreur commise sur la détermination de cette dimension doit donc avoir une influence beaucoup plus considérable sur la valeur de G que sur celle de E. Mais pour expliquer ainsi la différence en question il faudrait admettre dans la détermination des pesanteurs spécifiques dont j'ai déduit celles des rayons des fils une erreur moyenne de un treizième, erreur qui est hors de toute proportion avec celles qu'il est possible d'admettre sur une telle détermination, puisqu'elle supposerait que je me fusse trompé d'un gramme environ dans des pesées où il est difficile de commettre une erreur de quelques centigrammes. Il faudrait de plus que le sens de cette erreur eut été le même dans neuf pesées différentes, et que les pesanteurs spécifiques correspondantes fussent toutes trop fortes, tandis qu'elles paraissent au contraire devoir être un peu trop faibles (d'un centième environ).

2.° Dans les expériences sur les allongemens la valeur de E se déduit de l'allongement que les fils prennent en passant d'une tension à une autre tension plus forte; pour se conformer à la signification théorique de la constante E ces deux tensions successives devraient l'une et l'autre être très-petites, tandis que dans le fait on est obligé d'employer des tensions assez considérables. On doit par cette raison obtenir en général pour E des valeurs trop faibles: et, comme rien de semblable n'a lieu dans les expériences sur la torsion, les valeurs de G doivent se trouver plus fortes que celles que l'on conclurait de la formule

$$G = \frac{\pi E}{5} .$$

Cette cause, bien que réelle, est cependant insuffisante pour rendre raison de l'écart en question.

3.° Enfin les couches superficielles des fils métalliques, plus comprimées, plus denses, et par conséquent plus roides que les couches intérieures n'agissent pour résister à l'extension qu'en raison de leur section transversale: tandis que leur résistance à la torsion est en raison composée de leur section et du carré de leur distance à l'axe du fil: ces couches ont donc sur la résistance à la torsion une influence plus sensible que sur la résistance à l'extension, et cette remarque paraît contenir l'explication la plus vraisemblable de la différence que nous avons trouvée entre les valeurs théorique et expérimentale du rapport $\frac{E}{G}$. On verra d'ailleurs dans le § II.e que les valeurs de G du Tableau II.e sont confirmées par les résultats des expériences d'un autre genre que je rapporterai dans ce §.

Je remarquerai ici que la valeur 4,619 du rapport $\frac{\pi E}{5}$ que j'ai tirée de la comparaison des expériences sur l'extension et sur la torsion des fils de fer s'accorde beaucoup mieux avec la valeur théorique 5, que celle qui se déduirait des expériences de M.r Duleau (1) sur la flexion et

(1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 49 et 54. Pour la comparaison de ces expériences voyez Navier, Leçons à l'école des Ponts et Chaussées, 2.e éd. T. I. pag. 61 et 105. Il faut remarquer que la constante désignée par G dans l'ouvrage de Navier est égale à $\frac{2G}{\pi}$ d'après les dénominations que j'ai employées dans ce mémoire.

sur la torsion des barres de fer forgé de forme cylindrique et carrée. En effet, en prenant les valeurs moyennes, ces expériences donneraient

$$E = 20000 \,, \qquad \frac{2G}{\pi} = 6061 \,,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\pi E}{G} = \frac{40000}{6061} = 6{,}103 \;;$$

valeur trop forte d'un cinquième environ.

En nommant n et n' le nombre des vibrations longitudinales, et le nombre des vibrations tournantes d'une même verge cylindrique, on doit avoir d'après la théorie du mouvement des corps élastiques

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\pi E}{2G}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} = 1{,}5811 \;;$$

Les expériences de Chladni et de Savart, citées par Poisson, donnent pour $\frac{n}{n'}$ les valeurs 1,50 et 1,6668 respectivement, qui s'écartent l'une et l'autre de un vingtième de la valeur théorique, la première en moins, la seconde en plus. D'après les valeurs de $\frac{\pi E}{G}$ rapportées dans le Tableau III.e, et en omettant toujours celle qui se rapporte aux fils de Pont-Bozet n.° 5, on aurait:

Pour les fils de Pont-Bozet n.° 10	$\frac{n}{n'} = 1{,}5488$
—— Pont n.os 5 et 10	1,5108
—— Bienne n.os 8 et 10	1,5061
Valeur moyenne de $\frac{n}{n'}$	1,5219 .

Ainsi cette valeur moyenne se trouve comprise entre celles de Chladni et de Savart, et s'accorde mieux que l'une et l'autre avec la valeur théorique 1,5811 dont elle ne diffère que d'un vingt-septième.

§ II.e

De l'élasticité des ressorts en hélices.

6. Sur un cylindre droit du rayon a soit tracée une hélice dont tous les élémens fassent l'angle e avec le plan de la base: le rayon R de courbure de l'hélice aura la même valeur dans tous les points de la courbe, et cette valeur sera

$$R = \frac{a}{\cos^2 . e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Soit encore $d\varphi$ l'angle infiniment petit que comprennent entr'eux les plans osculateurs de l'hélice aux deux extrémités de l'arc infiniment petit ds: on aura

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin . e \cos . e}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Soit h la hauteur d'une spire mesurée parallèlement à l'axe du cylindre, ou le pas de l'hélice, et l la longueur développée d'une spire; on aura:

$$2\pi a = \sqrt{l^2 - h^2}, \qquad \sin . e = \frac{h}{l}, \qquad \cos . e = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l},$$

et les valeurs de R et de $\frac{d\varphi}{ds}$ deviendront

$$R = \frac{l^2}{2\pi\sqrt{l^2 - h^2}}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2\pi h}{l^2} \quad \ldots\ldots (3).$$

Cela posé, supposons que l'on fasse varier la hauteur du pas h; en faisant varier en même temps le rayon a de sorte que la longueur l de chaque spire demeure constante le rayon R et l'angle $d\varphi$ varieront aussi, et en désignant ces variations par le caractéristique δ nous aurons

$$\delta . \frac{1}{R} = \frac{-2\pi h . \delta h}{l^2\sqrt{l^2 - h^2}}, \qquad \delta . \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2\pi . \delta h}{l^2} \quad \ldots\ldots (4).$$

Considérons maintenant un fil élastique de grosseur sensible plié en hélice de manière à former un de ces ressorts que l'on employe dans beaucoup de circonstances sous le nom de *ressorts à boudin* : nous allons former l'équation d'équilibre d'un tel ressort tendu dans le sens de son axe par une force donnée, en admettant que sa figure soit toujours celle d'une hélice, et que la longueur d'une spire soit la même avant et après l'application de cette force, de sorte que les points de la courbe qui se trouvaient disposés suivant une des génératrices du cylindre dans l'état naturel de l'hélice, se trouvent encore semblablement disposés après le changement de forme produit par l'action de la force (1). Nous nommerons H cette force, et en désignant par h, R et $d\varphi$ les mêmes choses que ci-dessus dans le ressort tendu, nous représenterons par h_0, R_0, $d\varphi_0$ les valeurs de ces mêmes quantités dans l'état naturel du ressort, ou lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur lui.

Soit ε le moment d'élasticité *de flexion* du fil dont le ressort est formé ; le rayon de courbure qui était R_0 dans l'état naturel du fil étant devenu R, le moment avec lequel le fil tendra à se remettre dans son état naturel sera équivalent à l'action d'une force

$$\varepsilon\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$$

appliquée à l'extrémité d'un bras de levier égal à l'unité.

Soit encore α le moment de l'élasticité *de torsion* du même fil: l'angle de deux plans osculateurs consécutifs qui était $d\varphi_0$ dans l'état naturel du fil étant devenu $d\varphi$ par l'effet du changement de forme de l'hélice, le fil aura reçu sur l'unité de longueur un degré de torsion exprimé par $\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}$, et par suite la force avec laquelle il tend à se détordre équivaut à une force $\alpha\left(\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}\right)$, agissant perpendiculairement à l'extrémité d'un rayon égal à l'unité.

Il ne reste qu'à former les expressions des vitesses virtuelles des forces que nous venons de considérer: la vitesse virtuelle de la force H

(1) V. sur cette hypothèse un mémoire de M. Mossotti, publié dans le XVIII. Volume des Mém. de la Soc. Italienne. Modène 1820.

qui tend le ressort sera d'abord évidemment égale a $n\delta h$, en nommant n le nombre des spires dont le ressort est formé.

Quant à la force $\varepsilon\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$ elle doit être regardée comme agissant dans le plan osculateur à la courbe, et suivant une direction perpendiculaire à la tangente et conduite à l'unité de distance du point de la courbe que l'on considère : or l'angle des deux tangentes successives qui était $\frac{ds}{R}$ deviendra $\frac{ds}{R}+\delta.\frac{ds}{R}$ lorsque le rayon R deviendra $R+\delta R$: ainsi la vitesse virtuelle du point d'application de la force que nous considérons actuellement sera $\delta.\frac{ds}{R}$, et son moment virtuel sera

$$\varepsilon\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)\delta.\frac{ds}{R}:$$

ce moment n'est relatif qu'à la réaction de l'élément ds, et pour avoir la somme de tous les moments semblables il faudra intégrer par rapport à s en étendant l' intégrale d'un bout à l'autre du fil.

On trouvera de même que le moment élémentaire de la réaction de torsion du ressort sera

$$\alpha\left(\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}\right)\delta.\frac{d\varphi}{ds}.ds\ ;$$

R. Università di Torino
ISTITUTO DI FISICA

on aura donc, pour l'équation d'équilibre du ressort,

$$Hn\delta h=\varepsilon\int\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)\delta.\frac{ds}{R}+\alpha\int\left(\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}\right)\delta.\frac{d\varphi}{ds}.ds\ ;$$

en effectuant l'intégration, ce qui se fera en supprimant les signes $\int$ et en mettant nl au lieu de ds, et en substituant pour $\delta\frac{1}{R}$ et pour $\delta.\frac{d\varphi}{ds}$ leurs valeurs (4), on trouvera

$$H\delta h=\varepsilon\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R}\right)\frac{2\pi h}{l\sqrt{l^2-h^2}}+\alpha\left(\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}\right)\frac{2\pi.\delta h}{l}\ ,$$

ou

$$\frac{l^3 H}{4\pi^2} = \varepsilon h . \frac{\sqrt{l^2 - h_0^2} - \sqrt{l^2 - h^2}}{\sqrt{l^2 - h^2}} + \alpha (h - h_0) \quad \ldots\ldots (5).$$

En général, le pas de l'hélice h sera une petite fraction de la longueur l d'une spire, et en négligeant la quatrième puissance et les puissances supérieures de $\frac{h}{l}$ on aura

$$\frac{l^3 H}{4\pi^2} = \varepsilon h \frac{h^2 - h_0^2}{2 l^2} + \alpha (h - h_0) \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

équation qui se reduira à

$$\frac{l^3 H}{4\pi^2} = \alpha (h - h_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

lorsque le rapport $\frac{h}{l}$ sera assez petit pour qu'on puisse sans erreur sensible en négliger le carré, et d'où l'on voit que les allongemens de l'hélice seront alors proportionnels aux charges, en supposant toutefois qu'une telle proportionnalité subsiste aussi entre les extensions et les torsions des fils métalliques, et les forces qui les produisent.

Si l'on nomme E le coefficient de l'élasticité de la matière dont le fil est formé, et si l'on suppose que sa section soit un cercle du rayon r, il faudra mettre au lieu des constantes α et ε les valeurs

$$\alpha = \frac{1}{5} E \pi r^4 , \qquad \varepsilon = \frac{1}{4} E \pi r^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

ce qui changera les équations (6) et (7) en celles-ci

$$H = \frac{4\pi^3 E r^4}{5 l^3} (h - h_0) \left\{ 1 + \frac{5}{8} . \frac{h(h + h_0)}{l^2} \right\}$$

$$H = \frac{4\pi^3 E r^4}{5 l^3} (h - h_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

En appliquant au même ressort une nouvelle force H_1, plus grande que H, et en désignant par h_1 la longueur correspondante du pas de

l'hélice, supposé toujours assez petit pour qu'on puisse négliger son carré, on aura de même

$$H_1 = \frac{4\pi^3 E r^4}{5 l^3}(h_1 - h_0) ,$$

et en soustrayant de cette valeur de H_1, celle de H

$$H_1 - H = \frac{4\pi^3 E r^4}{5 l^3}(h_1 - h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Si l'on détermine donc par l'expérience l'allongement $n(h_1 - h)$ que le ressort prend pour un accroissement $H_1 - H$ de la charge, on en déduira la valeur de la constante E par la formule

$$E = \frac{5 l^3}{4\pi^3 r^4} \cdot \frac{H_1 - H}{h_1 - h} ,$$

que l'on pourra écrire plus simplement ainsi

$$E = \frac{10 . a^3}{r^4} \cdot \frac{H_1 - H}{h_1 - h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

puisque, à cause de la petitesse de h, il est permis de substituer $2\pi a$ à la place de l.

8. Les hélices élastiques pourraient encore être employées d'une autre manière à la détermination de la constante E. L'extrémité ou base supérieure d'une hélice étant fixée de manière à rendre impossible tout mouvement de rotation de cette base autour de l'axe du ressort, que pour fixer les idées je supposerai vertical, on attache à sa base inférieure, et suivant un de ses diamètres, un levier droit et rigide, et à deux points de ce levier, placés de part et d'autre à la distance b de l'axe, on applique deux forces égales K, perpendiculaires à la longueur du levier, et dirigées en sens contraires dans le plan horizontal de la base de l'hélice. Ces forces imprimeront à la partie inférieure de l'hélice un mouvement de rotation autour de son axe, et ce mouvement se continuera jusqu'à ce que la réaction croissante du ressort ait acquis un moment égal à la somme de ceux des deux forces K. En nommant n

le nombre des tours de l'hélice lorsqu'elle sera parvenue à sa position d'équilibre, la vitesse virtuelle des points d'application des forces K sera $2\pi b.\delta n$, et par conséquent l'équation d'équilibre deviendra dans ce cas

$$4\pi b.K\delta n = nl\varepsilon\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)\delta\frac{1}{R}+nl\alpha\left(\frac{d\varphi}{ds}-\frac{d\varphi_0}{ds}\right)\delta\frac{d\varphi}{ds}\,. \quad (12).$$

Or, supposant le ressort disposé de manière que la longueur de son axe ne puisse point varier, nommant λ cette longueur, et L la longueur nl du ressort développé, on aura

$$\sin e = \frac{\lambda}{L}\,, \qquad \cos c = \frac{\sqrt{L^2-\lambda^2}}{L}\,, \qquad a = \frac{\sqrt{L^2-\lambda^2}}{2\pi n}\,,$$

et par suite

$$R = \frac{L^2}{2\pi n.\sqrt{L^2-\lambda^2}}\,, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{2\pi n.\lambda}{L^2}\,,$$

$$\delta.\frac{1}{R} = \frac{2\pi\sqrt{L^2-\lambda^2}}{L^2}.\delta n\,, \qquad \delta.\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2\pi\lambda}{L^2}.\delta n\,,$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation (12), en désignant par n_0 le nombre des spires de l'hélice lorsqu'elle n'est soumise à l'action d'aucune force extérieure, la changeront en

$$\frac{bKL^3}{\pi} = \left\{\varepsilon(L^2-\lambda^2)+\alpha\lambda^2\right\}(n-n_0)\,.$$

En mettant encore à la place de ε et de α leurs valeurs (8), il viendra

$$Kb = \frac{\pi^2 E r^4}{20.L^3}\left(5L^2-\lambda^2\right)(n-n_0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

d'où l'on tire

$$E = \frac{20.bL^3}{\pi^2 r^4(5L^2-\lambda^2)}\cdot\frac{K}{n-n_0}\,,$$

ou en négligeant λ^2 relativement à $5L^2$, et en nommant K_1 une

force plus grande que K, et n_1 la valeur correspondante de n

$$E = \frac{4bL}{\pi^2 r^4} \cdot \frac{K_1 - K}{n_1 - n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Dans ces formules et dans celles du n.° 7 on a supposé l'hélice formée d'un fil cylindrique : si la section du fil est un rectangle dont un coté μ soit parallèle à l'axe du ressort, et l'autre coté ν soit perpendiculaire à cet axe, au lieu des valeurs (8) on prendra

$$\varepsilon = \frac{E.\mu\nu^3}{12}, \qquad \alpha = \frac{2}{15} \cdot \frac{E\mu^3\nu^3}{\mu^2 + \nu^2}.$$

En combinant les équations de ce numéro avec celles du n.° précédent on formera sans peine l'équation d'équilibre d'une hélice élastique sollicitée par autant de force que l'on voudra, les unes parallèles, les autres perpendiculaires à l'axe, pourvu que ces forces soient telles que le ressort conserve après leur application, comme dans son état naturel, la forme d'une hélice.

9. Je vais rapporter maintenant les résultats des expériences que j'ai faites sur plusieurs ressorts hélicoïdes formés avec les même fils de fer, qui avaient servi aux expériences sur les extensions et sur les torsions. Connaissant le poids de chaque fil sous la longueur de un mètre, le poids du ressort me faisait connaître sa longueur développée, et en divisant cette longueur par le nombre des spires et par le rapport 2π de la circonférence au rayon j'en déduisais le rayon a de l'hélice.

Le ressort étant suspendu par deux points diamétralement opposés de la spire la plus haute, et un petit bassin de balance étant de même suspendu aux deux extrémités d'un diamètre de la spire la plus basse, lorsqu'on plaçait dans ce bassin des poids croissants en progression arithmétique le ressort prenait des allongemens qui formaient de même, en général, une progression arithmétique, et que l'on mesurait en rapportant à une échelle verticale divisée en millimètres les positions successives de deux points du ressort pris vers ses extrémités. L'hypothèse sur laquelle est fondée l'équation d'équilibre du ressort, c'est-à-dire que les points qui au commencement de l'expérience se trouvent placés sur une même verticale ne s'en écartent jamais dans les états successifs de

l'hélice, se vérifie sensiblement dans ces expériences tant que la charge n'est pas très-considérable, et, le pas h étant toujours assez petit relativement à l, on peut, sans erreur sensible, employer à la détermination de E la formule

$$E = \frac{10 . a^3}{r^4} \cdot \frac{H_1 - H}{h_1 - h},$$

et y mettant pour $H_1 - H$ l'accroissement de la charge, et pour $h_1 - h$ le quotient que l'on obtient en divisant l'allongement correspondant par le nombre des spires comprises entre les deux points dont on observe les positions successives.

J'ai dit que la longueur du ressort croît en général en progression arithmétique lorsque les valeurs de la charge suivent une progression semblable: cette proposition est néanmoins sujette à quelques restrictions. D'abord, même dans les expériences les plus régulières, les allongemens produits par des égaux accroissemens de la charge ne sont pas rigoureusement égaux entr'eux; ils vont au contraire en augmentant avec la charge suivant une loi, qui doit évidemment dépendre de celles que suivent les fils élastiques tendus ou tordus par des forces croissantes. Par cela-même cette marche croissante doit être très-lente tant que la charge n'est pas considérable. C'est ce qui a lieu effectivement, et l'on ne court aucun risque de commettre à cet égard des erreurs tant soit peu sensibles en prenant, pour former la valeur du rapport $\frac{H_1 - H}{h_1 - h}$, la moyenne arithmétique entre celles des allongemens successivement produits par plusieurs accroissemens égaux de la charge. Lors même que par des accroissemens répétés la charge a acquis une valeur considérable, et que la marche croissante des allongemens est devenue évidente, on peut toujours, comme on le verra plus bas, déduire la valeur du rapport $\frac{H_1 - H}{h_1 - h}$ tel qu'on l'observerait si cette circonstance n'avait point lieu. Mais il est une autre source d'erreurs beaucoup plus considérables; voici en quoi elle consiste.

10. Lorsqu'on se sert d'un ressort dont les spires consécutives sont en contact entr'elles dans l'état naturel du ressort, en d'autres termes, lorsque le pas de l'hélice non tendue est égal au diamètre du fil dont elle est formée, il peut arriver que des accroissemens égaux de la

charge produisent des allongemens d'abord fort petits ou même nuls, et qui vont ensuite en croissant d'une manière brusque et irrégulière: cette circonstance ne se présente jamais lorsque la valeur initiale du pas de l'hélice surpasse le diamètre du fil, de sorte que les spires se trouvent dès le commencement de l'expérience sensiblement écartées entr'elles. Lors même que, cette condition n'étant point remplie, on observe quelque irrégularité dans les premières valeurs des allongemens, cette irrégularité disparait ensuite dès que la charge a atteint une valeur telle que toutes les spires se trouvent sensiblement espacées. Il n'est point difficile de se rendre raison de ces circonstances; lorsque pour former un ressort hélicoïde on enveloppe un fil élastique sur la surface d'un cylindre, si ce fil se trouve avoir un leger degré de torsion, ce qui est presqu'inévitable, il arrivera qu'en séparant l'hélice du cylindre et en la laissant en liberté, elle tendra à s'allonger ou à se raccourcir, selon le sens de la torsion initiale. Cet allongement ou ce raccourcissement auront lieu en effet, si les spires n'étant point en contact, elles seront libres de céder à la réaction élastique qui tend à les détordre. Mais si les spires se touchent elles ne pourront nullement obéir à l'action d'une force qui tendrait à les rapprocher, et l'hélice se maintiendra dans un état de compression, quoique aucune force extérieure ne lui soit actuellement appliquée. Soit maintenant une telle hélice suspendue par son extrémité supérieure et tendue par des poids croissants, comme dans les expériences décrites plus haut: il est évident qu'en supposant l'hélice parfaitement régulière, et la pression qui s'exerce entre les spires constante d'un bout à l'autre, il n'y pourra avoir aucun allongement, tant que le poids qui agit sur elle sera moindre que cette pression: mais, dès que le poids aura atteint cette valeur, les spires se détacheront toutes au même instant les unes des autres, et le ressort s'allongera dès-lors proportionnellement aux accroissemens de la charge. Il en sera autrement lorsque l'hélice ne sera pas parfaitement régulière: la pression qui a lieu dans le ressort non chargé variant alors d'une spire à l'autre, il arrivera qu'à mesure que l'on augmentera la charge les spires les moins serrées se détacheront les premières, et les autres ne cesseront d'être en contact que successivement et dans un ordre qui dépendra de l'état initial de chacune, et qui pourra ne rien présenter de régulier: les allongemens seront nuls tant que toutes les spires se maintiendront en contact: ils seront

très-petits lorsque quelques unes seulement auront commencé à s'écarter entr'elles; ils croîtront ensuite irrégulièrement à mesure que le contact cessera entre un plus grand nombre de spires, et deviendront enfin parfaitement réguliers et sensiblement proportionnels aux accroissemens de la charge, lorsque cette charge ayant atteint une valeur égale à la plus grande des pressions qui s'exerçaient entre les spires, celles-ci s'écarteront l'une de l'autre sur toute la longueur du ressort.

Pour montrer par un exemple comment les allongemens procèdent dans les deux cas que je viens de considérer, j'extrairai en entier deux expériences de mon registre. Dans la première les spires étaient initialement en contact, et la marche des allongemens ne devient régulière qu'à partir de la charge de 350 grammes: dans la seconde au contraire les spires étant naturellement espacées entr'elles, on remarque une marche régulière dans les allongemens dès les premières valeurs de la charge.

Hélice N.° III.

Fil de fer de Pont-Bozet — N.° 10.

$r = 0^{mm},7635$; $a = 13^{mm},385$; $n = 36$.

Charges	Longueurs	Allongemens	
	mm	mm	
0 grammes	62,6		
		2,4	
50	65,0		
		4,0	
100	69,0		
		5,0	
150	74,0		
		6,0	
200	80,0		
		6,3	
250	86,3		
		7,0	
300	93,3		
		7,3	
350	100,6		
		7,9	Allongement moyen $8,^{mm}1$
400	108,5		
		8,2	
450	116,7		
		8,3	
500	125,0		
		8,0	
550	133,0		
		8,0	
600	141,0		
		8,2	
650	149,2		
		8,0	
700	157,2		

Hélice N.° XIV.

Fil de fer de Pont — N.° 14.

$r = 0^{mm},939$; $a = 18^{mm},475$; $n = 39$.

Charges	Longueurs	Allongemens	
	mm	mm	
0 grammes	177, 0		
		11, 5	
50	188, 5		
		10, 0	
100	198, 5		
		11, 0	
150	209, 5		
		11, 0	
200	220, 5		
		11, 5	
250	232, 0		
		11, 5	
300	243, 5		
		11, 0	Allongement moyen
350	254, 5		
		11, 2	$11^{mm},21$
400	265, 7		
		11, 3	
450	277, 0		
		11, 5	
500	288, 5		
		11, 2	
550	299, 7		
		11, 3	
600	311, 0		
		11, 7	
650	322, 7		
		11, 3	
700	334, 0		

11. J'ai fait ainsi quatorze expériences sur des hélices en fil de fer, c'est-à-dire six avec des fils de Pont-Bozet, trois avec des fils de Pont, et cinq avec des fils de Bienne. Ces fils sont pour la plupart identiquement les mêmes qui avaient servi aux expériences sur la torsion, et que j'ai ensuite pliés en hélices. Le Tableau IV.e contient toutes les données et les résultats de ces expériences, qu'il serait fastidieux de rapporter en détail. Les deux premières colonnes de ce Tableau indiquent

l'origine et le numéro de chaque fil: la troisième son rayon: la quatrième, la cinquième, et la sixième le rayon et le numéro d'ordre des hélices, et le nombre de leurs spires: on trouve dans la colonne suivante la valeur de l'allongement total de chaque hélice, pour un accroissement de la charge supposé de un gramme. Enfin la dernière colonne contient les valeurs de la constante E déduites des nombres des colonnes précédentes, par la formule (11).

J'ai rapproché dans le Tableau V.e les valeurs moyennes de E pour les fils de chaque numéro et de chaque usine déduites par trois méthodes différentes. On peut voir dans ce Tableau que les résultats moyens des expériences faites avec la balance de torsion sont en général assez bien d'accord avec ceux des expériences sur les hélices: on a déjà vu pourquoi ces résultats diffèrent de ceux des expériences sur l'extension. D'après l'ensemble de ces expériences on peut adopter pour E les valeurs suivantes.

Fils de fer de Pont-Bozet	$E = 16000$ kilogr.
— de Pont	15550
— de Bienne	19000
Moyenne	16850.

En omettant les résultats des expériences sur les extensions on aurait, au lieu de ces valeurs, celles qui suivent

Fils de fer de Pont-Bozet	$E = 17000$
— de Pont	16000
— de Bienne	19800
Moyenne	17600.

12. On trouvera dans le Tableau VI.e les données et les résultats de quelques expériences faites de la même manière sur des hélices

formées avec des fils de cuivre et de laiton. En adoptant pour les pesanteurs spécifiques de ces métaux passés à la filière les valeurs données par Brisson (1), c'est-à-dire 8,8785 pour le cuivre, et 8,5441 pour le laiton, on déduit de ces expériences les valeurs moyennes $E = 10484^{\text{kil.}}$ pour le premier, et $E = 9079^{\text{kil.}}$ pour le second. Coulomb (2) a trouvé pour l'élasticité du laiton, qui d'ailleurs est très-variable, une valeur beaucoup moindre, et égale seulement aux trois-dixièmes de celle qui appartient au fer, ce qui donnerait $E = 5460$ environ. Cette discordance provient en partie de ce que Coulomb supposait la pesanteur spécifique du laiton égale a celle de fer, ce qui le conduisait à une valeur trop grande du rayon du fil de laiton sur lequel ses expériences avaient été faites. En corrigeant le calcul de Coulomb d'après la pesanteur spécifique 8,5441, et en supposant celle du fer égale à 7,728 on trouverait $E = 6673$. Quoiqu'il en soit, les valeurs que j'ai trouvées s'accordent d'une manière très-remarquable avec celles que l'on déduit des expériences de Savart sur la torsion des verges élastiques (3). En effet, quatre expériences faites par ce Physicien sur des verges cylindriques de cuivre donnent pour E les valeurs

10454, 10927, 10603, 10142,

dont la moyenne 10531 ne diffère pas d'un deux-centième de celle que je viens de rapporter, ou de 10484. Une expérience du même Physicien sur une verge cylindrique de laiton conduit à la valeur $E = 9162$, qui ne diffère de 9079 que me donnent mes propres expériences, que d'un cent-douzième environ.

13. C'est un fait bien connu, qu'un fil métallique qui a été tendu ou tordu par l'action d'une force un peu considérable ne revient pas exactement à ses dimensions primitives lorsque la force cesse d'agir, et on exprime ordinairement ce fait en disant que l'élasticité du fil a été altérée par l'action de cette force. Il serait peut-être plus exact de dire, que cette action a changé d'une manière durable les positions d'équilibre

(1) Pesanteur spécifique des corps. Pages 21 et 22.
(2) Th. des machines simples, pag. 234.
(3) Ann. de Physique et de Chimie, août 1829.

des molécules du fil : car ces molécules reviennent encore vers leurs nouvelles positions d'équilibre avec une force égale à celle qui, dans l'état primitif du fil, les ramenait à leurs positions d'équilibre. GERSTNER a, le premier je crois, clairement formulé à cet égard une loi remarquable appuyée sur les résultats de ses propres expériences sur l'extension des fils de fer, et qui consiste en ce que :

Un fil métallique assujetti à une tension qui surpasse celle qu'on lui a fait précédemment éprouver prend un allongement qui se compose de deux parties : la première, que l'on peut appeler allongement passager, *et qui cesse d'exister dès que la force qui l'a produite cesse d'agir, est toujours proportionnelle à cette force : la seconde, que l'on peut nommer* allongement permanent, *subsiste encore lorsque le fil cesse d'être tendu, et croît suivant une loi plus rapide que les tensions qui l'ont produite* (1).

La formule que GERSTNER assigne pour exprimer en fonction de la tension la valeur de l'allongement total, ou *vice-versa*, peut être sujette à quelque incertitude ; mais ce qui me paraît n'en admettre aucune, c'est que, au moins entre des limites de force très-étendues, la quantité dont un fil qui a été tendu, ou tordu revient *vers* sa forme et ses dimensions primitives, est toujours proportionnelle à la force qui l'en avait écarté, quelle que soit la grandeur de cette force, et l'altération permanente qui en résulte dans l'état du fil. Je citerai à l'appui de cette proposition quelques expériences faites avec les mêmes hélices qui m'ont fourni les valeurs de E rapportées aux Tableaux VI.e

---

(1) V. POGGENDORF. Ann. der Physik und Chemie. Tom. XXVI. Pag. 269 et suiv.

On pourrait conclure de quelques expressions de COULOMB, et surtout de quelques unes des expériences qu'il rapporte, qu'il était parvenu à la même loi : je ne la trouve cependant nulle part explicitement enoncée dans son mémoire.

Hélice de Cuivre N.º I.

Charge	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
	mm	mm	mm
50 gr. ...	23, 75	0, 0	23, 75
100	61, 00	8, 5	52, 50 = 2 × 26, 25
150	112, 00	37, 0	75, 0 = 3 × 25, 0
200	223, 00	119, 0	104, 0 = 4 × 26, 0

Hélice de Cuivre N.º II.

Charge	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
	mm	mm	mm
10 gr. ...	3, 5	0, 0	3, 5
100	37, 0	2, 0	35, 0 = 10 × 3, 5
200	84, 5	16, 5	68, 0 = 20 × 3, 4

Hélice de Cuivre N.º III.

Charge	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
	mm	mm	mm
10 gr. ...	3, 0	0, 0	3, 0
100	31, 6	1, 5	30, 1 = 10 × 3, 01
200	67, 0	5, 5	61, 5 = 20 × 3, 07
300	108, 0	16, 0	92, 0 = 30 × 3, 07
400	151, 0	30, 0	121, 0 = 40 × 3, 02

Hélice de Laiton N.° I.

Charge	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
	mm	mm	mm
100 gr.	15,0	0,0	15,0
500	75,5	1,5	74,0 = 5 × 14,8
600	91,5	4,0	87,5 = 6 × 14,6
700	109,5	7,0	102,0 = 7 × 14,6
800	128,0	10,0	118,0 = 8 × 14,75

14. Ces expériences ne laissent aucun doute sur l'exactitude de la proposition qu'il s'agissait de confirmer. Dans ces expériences l'action de chaque charge n'a duré que quelques instans, c'est à-dire, que le temps nécessaire pour faire sur l'échelle verticale les deux lectures d'où les valeurs des allongemens sont déduites (1). Dans les expériences de Gerstner la durée de chaque tension était de dix ou douze minutes : mais on peut affirmer qu'une durée plus ou moins considérable ne change rien à la loi, par laquelle la quantité dont les molécules reviennent *vers* leurs positions primitives est toujours proportionnelle à la grandeur *seule* de la tension. En d'autres termes, la durée de l'action de la force n'influe que sur la grandeur des allongemens permanents, sans exercer aucune influence sensible sur celle des allongemens passagers : je rapporterai encore, à l'appui de cette conclusion, quelques expériences.

---

(1) On trouvera à la fin du mémoire (Note A) quelques expériences analogues que j'ai faites sur des hélices d'argent, d'étain et de plomb, depuis la rédaction de ce mémoire.

Hélice de Fer N.º IX.

Tension ou Charge	Durée de la Tension	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
800 gr.	0′	211,5	2,0 ...	209,5 = 8×26,2
»	21′	215,0	5,5 ...	209,5 = 8×26,2
»	134′	218,0	7,5 ...	210,5 = 8×26,3
»	314′	219,8	10,0 ...	209,8 = 8×26,2
1000	0′	290,5	23,2 ...	267,3 = 10×26,7
»	67′	301,5	31,0 ...	270,5 = 10×27,0
»	166′	306,5	35,5 ...	271,0 = 10×27,1

Hélice de Cuivre N.º II.

Tension ou Charge	Durée de la Tension	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
250 gr.	0′	100,0	11,0	89,0 = 5×17,8
»	138′	157,5	68,5	89,0 = 5×17,8
»	213′	165,1	74,1	91,0 = 5×18,2
300	0′	182,5	74,5	108,0 = 6×18,0
»	134′	218,5	110,0	108,5 = 6×18,1
»	313′	242,1	133,5	108,6 = 6×18,1
»	745′	272,1	166,5	105,6 = 6×17,6

Hélice de Laiton N.° I.

Tension ou Charge	Durée de la Tension	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
800 gr.	0′	120,5	2,0	118,5 = 8×14,8
»	54′	120,5	2,0	118,5 = 8×14,8
920	0′	140,2	5,0	135,2 = 9,2×14,69
»	94′	141,8	7,0	134,8 = 9,2×14,65
1120	0′	180,5	12,5	168,0 = 11,2×15,0
»	62′	184,1	15,9	168,2 = 11,2×15,0
»	617′	187,0	19,0	168,0 = 11,2×15,0
1320	0′	229,0	28,3	200,7 = 13,2×14,39
»	66′	236,0	34,2	201,8 = 13,2×14,51
»	231′	239,0	36,7	202,3 = 13,2×14,55
»	636′	241,0	40,3	200,7 = 13,2×14,44

Hélice de Laiton N.° III.

Tension ou Charge	Durée de la Tension	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
1800 gr.	0′	275,0	21,5	253,5 = 18×14,08
»	3′	278,5	24,5	254,0 = 18×14,11
»	71′	281,5	28,5	253,0 = 18×14,05
»	251′	283,0	29,5	253,5 = 18×14,08
»	639′	285,5	31,0	254,5 = 18×14,14

On voit par ces expériences que pour une tension d'une durée insensible, comme pour une tension dont l'action se prolonge pendant plusieurs heures, l'allongement passager est constamment le même,

quoique l'allongement permanent soit beaucoup plus considérable dans le second que dans le premier cas (1). Les legers écarts que l'on peut remarquer dans les nombres de la dernière colonne de ces quatre Tableaux, ne suivent aucune marche régulière, et doivent être entièrement attribués à des erreurs d'observation. Il resterait à déterminer les limites de force et de durée, entre lesquelles cette loi se vérifie: je pourrais citer dès à présent quelques faits qui prouvent déjà que ces limites sont très-étendues: mais j'attendrai que des nouvelles expériences me permettent de formuler des conséquences plus précises.

Cette proportionnalité des allongemens instantanés aux forces qui les produisent, quelles que soient ces forces et la durée de leur action, fournit un moyen exact de déterminer la valeur de la constante E par les allongements, soit des fils métalliques mêmes, soit des hélices formées avec ces fils. En supposant, par exemple, que l'on choisisse ce dernier moyen qui est beaucoup plus commode, on n'aura qu'à observer de combien le ressort se raccourcit à l'instant où, après l'avoir tendu avec un poids et pendant un temps quelconque, on retranche tout-à-coup une partie de ce poids: le poids retranché divisé par le retrait et par le nombre n des spires de l'hélice donnera la valeur du rapport $\frac{H_1 - H}{h_1 - h}$, telle qu'on l'aurait obtenue en n'employant que des tensions infiniment petites, ou du moins incapables de produire un allongement permanent: il faudra seulement prendre garde que le moindre des deux poids employés soit tel encore, que les spires du ressort ne soient nulle part en contact. C'est ainsi qu'ont été déterminés les allongemens marqués dans l'avant-dernière colonne des Tableaux IV.e et VI.e

15. Lorsque l'on donne à un fil métallique une tension moindre que celles auxquelles il a été précédemment assujetti, l'allongement permanent produit par cette nouvelle tension est nul, suivant Gerstner, et le fil revient toujours exactement à la longueur que les tensions précédentes lui avaient fait prendre. Le fait est vrai lorsqu'il se passe un intervalle de temps fort court entre l'instant où les premières tensions

(1) Il en est encore de même pour une tension dont l'action se prolonge pendant plusieurs jours, ou même plusieurs mois, ainsi que je m'en suis assuré par des expériences ultérieures. V. Note B à la fin du mémoire.

ont cessé d'agir, et celui où on soumet le fil à l'action d'une tension nouvelle ; mais il en est autrement lorsque cet intervalle est un peu considérable. L'hélice de cuivre n.° II ayant été maintenue pendant plusieurs heures sous l'action d'une charge de 300 grammes, et ensuite déchargée, et immédiatement rechargée avec des poids croissants de 20 en 20 grammes, j'observai en effet que ces poids produisaient des allongemens sensiblement égaux, et que l'hélice revenait toujours completement à la même longueur, lorsqu'on enlevait ces poids: il arrivait même quelquefois que la longueur après l'application d'un de ces poids et son enlèvement, se trouvait moindre qu'auparavant, effet qu'il n'est point difficile d'expliquer. Mais le même ressort étant demeuré en repos pendant deux jours, l'allongement qui lui était resté à l'instant où il avait été déchargé des 300 grammes, avait en grande partie disparu, et s'était réduit de 166,^{mm}5 à 78^{mm}. L'ayant alors rechargé avec des poids croissants de 20 en 20 grammes, j'observai les allongemens suivants.

Charge	Allongement total	Allongement permanent	Allongement passager
	mm	mm	mm
20 grammes	7, 5	0	7, 5
100	37, 5	1, 5	36, 0
200	77, 5	7, 0	70, 5
300	132, 5	26, 0	106, 5

On voit ici reparaître un allongement permanent dès la charge de 100 gr., quoique le même ressort eut été assujetti deux jours auparavant pendant plusieurs heures à une tension de 300 grammes. On voit encore que ce que j'ai nommé jusqu'ici *allongement permanent* est loin de mériter ce nom d'une manière absolue, puisqu'il disparaît en grande partie après un temps suffisamment long, et se reproduit alors sous des tensions suffisantes et assez longtemps continuées.

16. Je résumerai en peu de mots et d'une manière générale les observations que je viens d'exposer. L'altération de forme produite par l'action d'une force extérieure sur un corps élastique se compose de deux parties : l'une indépendante de la durée de cette action et sensiblement proportionnelle à son intensité ; l'autre, croissant plus ra-

pidement que la force qui la produit, et suivant une fonction de la durée de son action. La force extérieure venant à cesser la première partie de l'altération qu'elle avait causée dans le corps disparaît instantanément: la seconde persiste, mais en diminuant continuellement avec le temps. Une nouvelle force plus ou moins intense que la première vient-elle à son tour agir sur le même corps? Les mêmes effets se reproduisent avec une intensité qui dépend de l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre l'action des deux forces, de l'intensité de la seconde, et de la durée de son action. Quelle est la fonction de la tension et du temps suivant laquelle ces altérations se produisent et disparaissent? et cette fonction est-elle la même quelle que soit la matière des corps où elles se produisent? Voilà des questions auxquelles, malgré les travaux très-remarquables de plusieurs physiciens, il ne paraît pas que l'on soit en état de répondre encore complètement: Leslie (1) et Gerstner (2) ont publié des formules pour exprimer la loi des allongemens des prismes de fer sous des tensions croissantes; M.r Gauss (3) a proposé une loi empyrique pour satisfaire aux résultats des expériences de M.r Weber sur les degrés successifs par lesquels un fil de soie fortement tendu, et rallenti ensuite, revient vers sa longueur primitive: mais toutes ces questions paraîssent demander encore pour être éclaircies dans leur ensemble, et autant qu'elles méritent de l'être, des études suivies faites sur des corps de nature différente et avec des moyens variés: je me flatte que l'emploi des hélices élastiques pourra rendre quelques services dans ces recherches, soit par la commodité, soit par l'exactitude dont ce moyen me paraît susceptible.

---

(1) Elem. of nat. phil. Edimburg 1823. — Cité par M. Poncelet mécan. industr. 2.e édit. p. 343.
(2) Poggendorf. Ann. endroit cité et Handbuch der Mechanik. Prag. 1823. Tom. 1. p. 263. et suiv.
(3) Ibid. — Tom. 34. pag. 247.

TABLEAU I.ER

Expériences sur l'élasticité de torsion des fils de fer.

(1) USINE	(2) N.° du fil	(3) Rayon du fil r	(4) N.° de l'Expér.e	(5) Longueur du fil l	(6) Durée d'une Oscillation T
		mm.		mm.	
Pont-Bozet .	5	0,4825	I.	3163,9	106″,71
			II.	3337,6	110,17
	10	0,7635	III.	3315,6	46,77
			IV.	3320,1	45,61
Pont	5 bis	0,4875	V.	3314,1	110,81
			VI.	3326,3	117,62
	10	0,7605	VII.	3307,0	45,06
			VIII.	3328,8	44,06
Bienne . . .	8	0,5380	IX.	3324,8	80,94
			X.	3331,4	81,37
	10	0,6630	XI.	3337,8	56,88
			XII.	3342,9	56,50

TABLEAU IIE

Valeurs de la Constante G de l'élasticité de torsion pour les fils de fer.

(1) USINE	(2) N.° du fil	(3) N.° de l'Expér.^e	(4) Valeur de la Constante $G = \frac{2220 . l}{r^4 T^2}$	(5) Valeurs moyennes de la Constante G	
Pont-Bozet .	5	I.	11173	11221	10694
		II.	11269		
	10	III.	9905	10166	
		IV.	10427		
Pont	5 bis	V.	10609	10029	10563
		VI.	9450		
	10	VII.	10809	10096	
		VIII.	11382		
Bienne	8	IX.	13438	13366	12654
		X.	13293		
	10	XI.	11853	11942	
		XII.	12032		
Valeur moyenne déduite de toutes les expériences					11304

TABLEAU III.E

Comparaison des expériences sur l'extension et sur la torsion.

(1) USINE	(2) N.o du fil	(3) Constante de l'extension E	(4) Constante de la torsion G	(5) Valeur du rapport $\frac{\pi E}{G}$	(6) Valeur de la formule $\frac{\pi E}{5}$
Pont-Bozet .	5	13613	11221	3,811 (*)	8553
	10	15524	10167	4,798	9753
	moyennes	14568	10694	4,404	9153
Pont	5 bis	14950	10030	4,683	9393
	10	15940	11096	4,513	10015
	moyennes	15445	10563	4,598	9704
Bienne	8	18351	13366	4,313	11530
	10	18195	11943	4,786	11432
	moyennes	18273	12654	4,549	11481

Moyenne entre toutes les valeurs de $\frac{\pi E}{G}$ en omettant la première . . . . . $= 4,619$.

TABLEAU IV.E

Expériences sur l'élasticité des ressorts hélicoïdes en fil de fer.

(1) USINE	(2) N.° du fil	(3) Rayon du fil r	(4) N.° du Ressort	(5) Rayon du Ressort a	(6) Nombre des Spires n	(7) Allong.nt du ressort entier par gramme de charge	(8) Valeur de E
		mm		mm		mm	kil.
Pont-Bozet	5	0, 4825	I.	6, 610	73	0, 2192	17780
			II.	14, 124	33	1, 0550	16262
	10	0, 7635	III.	13, 383	36	0, 1620	18809
			IV.	19, 330	25	0, 1370	18955
	14	1, 0465	V.	13, 266	40	0, 0506	15387
			VI.	18, 894	32	0, 1114	16155
Pont . . .	5 bis	0, 4875	XII.	13, 501	35	1, 1135	13700
	10	0, 7605	XIII.	18, 732	26	0, 2952	17300
	14	0, 9390	XIV.	18, 475	39	0, 2136	14811
Bienne . .	8	0, 5380	VII.	6, 693	74	0, 1250	21192
	10	0, 6630	VIII.	13, 727	35	0, 2774	17014
			IX.	13, 638	36	0, 2632	17958
	12	0, 8595	X.	19, 759	36	0, 2650	19252
			XI.	19, 968	35	0, 2486	20534

R. Università di Torino
ISTITUTO DI FISICA

TABLEAU V.E

Récapitulation des valeurs de la Constante E pour les fils de fer déduites par trois méthodes différentes d'expérience.

USINES	N.os des fils	VALEURS DE LA CONSTANTE *E* déduites des Expériences sur l'Extension	la Torsion	les Hélices	Moyennes
Pont-Bozet .	5	13613	17842	17012	16156
	10	15524	16182	18882	16862
	14	12004	* * *	15771	13887
	Moy.es	13714	17012	17222	15983
Pont	5 bis	14950	15962	13700	14837
	10	15940	17650	17300	16963
	14	12829	* * *	14811	13820
	Moy.es	14573	16806	15270	15549
Bienne	8	18351	21224	21192	20256
	10	18195	19007	17486	18229
	12	15911	* * *	19893	17902
	Moy.es	17486	20115	19523	19041

TABLEAU VI.E

Expériences sur l'élasticité des ressorts en hélice formés avec des fils de Cuivre rouge et de Laiton.

(1) NATURE DES FILS	(2) N.os des fils	(3) Rayons des fils r	(4) N.o des Hélices	(5) Rayons des Hélices a	(6) Nombre des Spires n	(7) Allong.nt du ressort entier par gramme de charge	(8) Valeurs de la Constante E
		mm		mm			kil.
Fils de Cuivre	4	0, 447	I.	6, 432	74	2, 060	9797
	1	0, 712	II.	13, 124	42	0, 350	10570
	2/0	0, 869	III.	18, 715	29	0, 300	11084
	Valeur moyenne de E pour les fils de Cuivre						10484
Fils de Laiton	8	0, 583	I.	7, 144	40	0, 1476	8520
	15	1, 086	II.	13, 938	37	0, 0805	8954
			III.	20, 530	22	0, 1400	9781
	»	0, 1856	IV.	0, 8835	1362	0, 8550	9061
	Valeur moyenne de E pour les fils de Laiton						9079

NOTE A.

Expériences sur les hélices d'argent, d'étain et de plomb, et sur l'extension et le retrait des fils de cuivre, de laiton et de plomb.

La loi de la proportionnalité des allongemens passagers aux tensions qui les produisent n'avait été expérimentalement démontrée par GERSTNER que pour les fils et les lames minces de fer et d'acier ; les expériences rapportées dans le mémoire qu'on vient de lire démontrent que la même loi s'applique aux fils de cuivre et de laiton: je l'ai vérifiée depuis sur les fils d'argent, d'étain et de plomb : voici les résultats de quelques unes des expériences faites sur ces métaux.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE

Hélice d'argent (Titre 0,800)

Rayon du fil $r = 0^{mm},7754$; Rayon de l'hélice $a = 6^{mm},991$;

Nombre des spires $n = 42$.

Charge	Allongement total	Diminution de la charge	Retrait instantané
	mm		mm
300 gr.	16,9	300 gr.	16,8
400	22,9	»	17,2
500	29,0	»	17,3
600	35,1	»	17,4

Suite de l'expérience:

Charge	Allongement total	Diminution de la charge	Retrait instantané
	mm		mm
700 gr.	41,2	300 gr.	17,4
800	47,5	»	17,5
900	53,9	»	17,5
1000	60,2	»	17,4
1100	66,6	»	17,4
1200	73,1	»	17,3
1300	79,7	»	17,2
1400	86,6	»	17,2
1500	93,75	»	17,15
1600	102,0	»	17,0
1700	110,9	»	17,0
1800	120,1	»	16,4
1900	131,6	»	16,6
2000	144,3	»	16,3
2100	160,8	»	16,7

Retrait moyen pour 300 gr. $= 17^{mm},0921$.

Cette expérience donne pour les fils d'argent au titre de 0,800, $E = 7142,^{kil.}5$ par millimètre carré de section.

EXPÉRIENCE DEUXIÈME

Hélice d'argent. (Titre 0,833).

Rayon du fil $r = 0^{mm},6097$; Rayon de l'hélice $a = 6^{mm},7859$;
Nombre des spires $n = 54$.

NB. Les spires sont en contact dans l'état naturel de l'hélice.

Charge	Allongement total	Diminution de la charge	Retrait instantané
	mm		mm
300 gr. .	31, 2 . . .	100 gr. . .	14, 80 = 14, 80
400 . . .	57, 2 . . .	200	29, 70 = 2×14, 85
500 . . .	74, 2 . . .	300	45, 00 = 3×15, 00
600 . . .	92, 7 . . .	200	30, 00 = 2×15, 00
» . . .	» . . .	400	60, 70 = 4×15, 17
700 . . .	112, 2 . . .	200	30, 00 = 2×15, 00
» . . .	» . . .	500	76, 00 = 5×15, 20
800 . . .	133, 2 . . .	200	30, 00 = 2×15, 00
» . . .	» . . .	600	91, 50 = 6×15, 50
900 . . .	158, 2 . . .	200	30, 10 = 2×15, 02
» . . .	» . . .	700	108, 00 = 7×15, 40
1000 . . .	184, 2 . . .	200	30, 30 = 2×15, 15
» . . .	» . . .	800	124, 00 = 8×15, 50

Retrait moyen pour 100 gr. $= 15^{mm},125$.

Cette expérience donne pour les fils d'argent au titre de 0,833, $E = 8074^{kil.},5$ par millimètre carré : en prenant la moyenne entre cette valeur et la précédente on aurait pour l'argent $E = 7608^{kil.},5$.

L'étain et le plomb, par la facilité avec laquelle ils s'étendent et se déforment, ne se prêtent que difficilement à des expériences de ce genre: d'une part ce que nous avons nommé allongement passager paraît naître et disparaitre moins brusquement dans ces métaux, que dans les métaux plus roides, et d'autre part l'allongement successif ou *permanent* croit et diminue moins lentement, et atteint des valeurs beaucoup plus considérables. Il s'ensuit que, même sous des faibles charges, les hélices de plomb et d'étain n'arrivent pas en peu d'instans à une longueur à-peu-près fixe et invariable; au contraire, elles continuent à s'allonger d'une manière très-sensible, et pour observer la grandeur de leur retrait instantané il faut supprimer la charge en tout ou en partie sans que l'hélice soit sensiblement parvenue au repos: l'enlèvement d'une partie de la charge produit alors un retrait instantané, auquel succède immédiatement un retrait plus lent, mais cependant assez rapide pour qu'il soit souvent très-difficile de bien saisir le point où le premier finit et le second commence. On y parvient cependant avec un peu d'habitude; dans les expériences sur l'étain, afin d'atténuer l'effet des erreurs d'observation et d'obtenir des valeurs moyennes plus exactes, je procédais de la manière suivante: après avoir appliqué une charge à l'hélice, je laissais celle-ci s'allonger jusqu'à ce que l'index fixé à son extrémité inférieure parvînt à une certaine division de l'échelle: enlevant alors rapidement une partie de la charge, j'observais et je notais la grandeur du retrait instantané: je rétablissais ensuite la charge entière: il se produisait un nouvel allongement qui avait bientôt surpassé le premier, et lorsque l'hélice s'était allongée ainsi jusqu'à un certain point, j'enlevais la même partie de la charge que la première fois, et j'observais de nouveau la grandeur du retrait instantané: en répétant ainsi plusieurs fois de suite cette observation, je me procurais autant de valeurs très-peu différentes entr'elles, et dont la moyenne ne pouvait être affectée que d'une erreur de très-peu d'importance. Aussi les expériences sur les hélices de plomb, pour lesquelles je m'étais contenté d'une seule observation pour chaque diminution de la charge, m'ont-elles donné des résultats dont la marche est beaucoup moins régulière. Telles qu'elles sont, et quoique peu nombreuses, ces expériences me paraissent suffire pour prouver que les métaux mous sont sujets à la même loi que les métaux roides, c'est-à-dire que leurs allongemens et leurs retraits instantanés sont constamment proportionnels aux accrois-

semens et aux décroissemens de la charge, tandis que leurs allongemens permanens croissent suivant une progression toute différente, et beaucoup plus rapide. — Je n'ai point inséré dans les Tableaux qui suivent les valeurs de l'allongement total correspondant à chaque charge, parceque ces valeurs dépendent de la durée de l'action de la charge même, durée qui a été tantôt plus tantôt moins grande, et dont je n'ai pas toujours tenu compte, parceque, comme on a vu dans le mémoire, et comme on verra mieux encore dans la note suivante (B), cette durée n'a point d'influence sensible sur la grandeur des allongemens passagers.

EXPÉRIENCE TROISIÈME

Hélice d'étain.

Rayon du fil $r = 1^{mm},2235$: Rayon de l'hélice $a = 7^{mm},0169$;
Nombre des spires $n = 43$.

Charge totale	Diminution de la charge	Retrait instantané
35 gr.	30 gr.	$0,^{mm}7 = 3 \times 0,^{mm}233$
55	50	$1,20 = 5 \times 0,240$
75	70	$1,53 = 7 \times 0,218$
95	90	$2,00 = 9 \times 0,222$
115	110	$2,50 = 11 \times 0,227$
135	130	$3,00 = 13 \times 0,231$
155	150	$3,07 = 15 \times 0,205$
175	170	$3,73 = 17 \times 0,219$
195	190	$4,27 = 19 \times 0,225$
215	210	$4,70 = 21 \times 0,224$
235	230	$4,73 = 23 \times 0,206$
255	250	$5,35 = 25 \times 0,214$
275	270	$5,85 = 27 \times 0,217$

Retrait moyen pour 10 gr. $= 0^{mm},2215$.

EXPÉRIENCE QUATRIÈME

Hélice d'étain.

Rayon du fil $r = 1^{mm},2228$; Rayon de l'hélice $a = 12^{mm},996$;

Nombre des spires $n = 37$.

Charge totale	Diminution de la charge	Retrait instantané
		mm mm
35 gr.	20 gr.	2,00 = 2×1,000
45	30	3,00 = 3×1,000
55	40	4,25 = 4×1,062
65	50	6,00 = 5×1,200
75	60	7,00 = 6×1,167
85	70	8,00 = 7×1,143
95	80	9,75 = 8×1,219

Retrait moyen pour 10 gr. $= 1^{mm},113$.

Ces deux expériences donnent pour E les valeurs $2923^{kil.}$, et $3264^{kil.}$ par millimètre carré, ce qui s'accorde bien avec la valeur $3200^{kil.}$ trouvée par Tredgold (1). Cependant je soupçonne que ces valeurs sont un peu trop fortes: car les valeurs de r que j'ai employées dans le calcul, et qui ont été déduites du poids de un mètre de longueur du fil, en supposant la pesanteur spécifique de l'étain fin d'Angleterre égale à 7,3, sont de quelques centièmes de millimètre plus faibles que celles que la mesure directe m'a fournies, et qui sont $r = 1^{mm},250$ pour le fil de l'expérience 3.e, et $r = 1^{mm},27$ pour celui de l'expérience 4.e

(1) V. Poncelet. Intr. à la Méc. ind. 2.e ed. pag. 361.

EXPÉRIENCE CINQUIÈME

Hélice de plomb.

Rayon du fil $r = 0^{mm},5769$; Rayon de l'hélice $a = 3^{mm},3417$;

Nombre des spires $n = 116$.

Charge	Diminution de la charge	Retrait instantané
		mm mm
12 gr.	10 gr.	2,1 = 1 × 2,10
22	20	3,7 = 2 × 1,85
32	30	5,8 = 3 × 1,93
42	40	7,6 = 4 × 1,90
52	50	10,2 = 5 × 2,04
62	60	10,9 = 6 × 1,82
72	70	14,0 = 7 × 2,00
82	80	16,4 = 8 × 2,05

Retrait moyen pour 10 gr. $= 1^{mm},961$.

EXPÉRIENCE SIXIÈME

Hélice de plomb.

Rayon du fil $r = 1^{mm},1941$; Rayon de l'hélice $a = 12,8795$;

Nombre des spires $n = 26$.

Charge	Diminution de la charge	Retrait instantané
20 gr.	10 gr.	$1,4^{mm} = 1,40^{mm}$
30	20	$2,8 = 2 \times 1,40$
40	30	$4,5 = 3 \times 1,50$
50	40	$6,1 = 4 \times 1,52$
60	50	$7,8 = 5 \times 1,56$
70	60	$9,5 = 6 \times 1,58$
80	70	$10,3 = 7 \times 1,47$
90	80	$13,3 = 8 \times 1,66$

Retrait moyen pour 10 gr. $= 1^{mm},511$.

Ces deux dernières expériences donnent $E = 2009^{kil.},6$ et $E = 1808^{kil.},5$ par millimètre carré, valeurs qui excèdent le double de celles que d'autres expérimentateurs ont trouvées par les flexions des cylindres de plomb : une si grande différence n'a rien qui doive étonner : car, outre que ces auteurs ont opéré sur des cylindres d'un diamètre plusieurs fois plus grand que celui des fils dont mes hélices étaient formées, ce qui peut avoir une influence bien sensible sur les résultats, il n'est pas douteux que pour peu que la charge ou la durée de son action soient considérables, l'extension des fibres et la flexion qui en est la conséquence atteignent des valeurs beaucoup plus grandes que le retrait auquel la suppression de cette charge donne lieu. Dans l'expérience 5.e par exemple l'hélice s'était allongée de $4^{mm},65$ en passant de la charge de 12 grammes

à celle de 22 gr.; mais en revenant à la première charge elle ne s'est retirée que de $1^{mm},85$; en calculant la valeur de E d'après l'allongement $4^{mm},65$ on aurait trouvé $E = 846^{kil.}$. Ainsi encore dans l'expérience 6.e l'allongement en passant de la charge de 10 gr. à celle de 20 gr., avait été de $4^{mm},2$; mais en revenant à la première charge le retrait n'a été que de $1^{mm},4$; en partant de l'allongement $4^{mm},2$ on aurait trouvé $E = 660^{kil.}$. On trouverait pour E des valeurs beaucoup moindres encore en les déduisant des allongemens produits sous des charges plus considérables: l'hélice de la dernière expérience, par exemple, ayant pris un allongement de $12^{mm},1$ en passant de la tension de 80 gr. à celle de 90 gr., on en conclûrait $E = 325^{kil.}$. Cette observation qui s'applique à un métal quelconque, mais plus particulièrement à ceux dont l'extensibilité est très-grande, montre l'impossibilité d'obtenir pour E une valeur fixe et constante en la déduisant de la grandeur de l'*allongement total* qui croît beaucoup plus rapidement que la tension, au lieu de la déduire de celle de l'*allongement passager*, ou du retrait instantané qui se maintient sensiblement proportionnel à la charge correspondante.

Quoique les expériences sur les hélices me parussent bien suffisantes pour démontrer cette proportionnalité des allongemens passagers aux charges qui les produisent, j'ai cherché encore à la vérifier par des expériences directes sur l'extension et sur le retrait des fils de cuivre, de laiton et de plomb: ces expériences ont été faites avec l'appareil de S'GRAVESANDE, en augmentant et en diminuant alternativement le poids suspendu au milieu du fil, et en observant la flêche correspondante à chaque augmentation et à chaque diminution de poids. L'emploi de cet appareil est très-exact, et permet de pousser l'expérience jusqu'à la rupture du fil: mais il a l'inconvénient d'exiger pour la réduction des résultats, des calculs assez prolixes, qui ne laissent pas de devenir fastidieux. Je me bornerai dans les Tableaux suivants à rapporter les nombres qui ont trait à la question présente, me proposant de revenir une autre fois sur ces expériences, pour m'occuper de la loi des allongemens permanens en fonction de la tension.

EXPÉRIENCE SEPTIÈME

Fil de laiton.

Poids par mètre $0^{gr.},2328$; Section $0^{mm.c.},02725$; Rayon $0^{mm},09312$.

Tension totale	Diminution de la tension	Retrait instantané en parties de la longueur primitive	Rapport du retrait à la diminution de la tension
gr. 742,7	gr. 351,6	0,001269	0,000036092
959,6	223,7	0,000822	36746
1146,9	188,3	786	41742
1312,7	181,7	679	37369
1465,3	168,9	638	37774
1605,7	158,2	612	38685
1736,8	152,8	574	37565
1854,4	145,4	559	38442
1963,8	139,2	543	39152
2057,4	272,9	0,001061	38889
2148,1	262,1	1044	39832
2227,4	254,3	1005	39520
2309,7	Rupture		
		Retrait moyen par gramme	0,0000038484.

On voit dans cette expérience la grandeur du retrait se maintenir, jusqu'à l'instant de la rupture, presque rigoureusement proportionnelle à la diminution correspondante de la tension: les legers écarts au dessus et au dessous de la moyenne, ne devant être attribués qu'à des erreurs d'observation inévitables. Cependant les allongemens suivirent dans cette même expérience une marche beaucoup plus rapide que les tensions:

car ayant trouvé qu'au commencement de l'expérience chaque gramme de tension produisait un allongement de 0,00000394 de la longueur primitive, je trouvai que pour des tensions peu différentes de celle qui produisit la rupture, l'allongement était de 0,00001145 par gramme, ou trois fois plus grand qu'au commencement de l'expérience; cette expérience donne pour la valeur de E le nombre $9558^{kil.}$ par mill. carré.

L'expérience suivante faite sur un fil de cuivre rouge donne lieu aux mêmes observations; sauf la rapidité beaucoup plus grande de la loi suivant laquelle les allongemens allaient en augmentant. En effet ici encore la grandeur du retrait s'est constamment maintenue proportionnelle à la diminution correspondante de la tension; mais tandis que les premiers allongemens étaient de 0,00000339 de la longueur primitive par gramme, ils atteignirent en croissant graduellement du commencement à la fin de l'expérience une valeur trente fois plus forte. La valeur de E qui se déduit de cette expérience est de $12303^{kil.}$ par millimètre carré.

EXPÉRIENCE HUITIÈME

Fil de cuivre.

Poids par mètre $0,^{gr.}2129$; Section $02^{mm\,c.},02399$;

Rayon $0^{mm},08774$.

Tension totale	Diminution de la tension	Retrait instantané en parties de la longueur primitive	Rapport du retrait à la diminution de la tension
$568,^{gr.}1$	$163,^{gr.}1$	0,000463	0,0000028386
691,2	140,9	406	28807
800,8	128,6	360	27992
898,1	118,8	334	28105
986,8	110,7	320	28899
1064,4	104,6	305	29148
1133,4	99,8	290	29068
1195,5	95,5	279	29214

Suite de l'expérience:

Tension totale	Diminution de la tension	Retrait instantané en parties de la longueur primitive	Rapport du retrait à la diminution de la tension
1244,3 gr.	91,1 gr.	0,000270	0,0000029638
1286,8	88,3	253	28652
1320,6	85,1	241	28320
1348,4	82,4	226	27427
1371,1	79,4	228	28715
1396,6	77,3	203	26261
1403,9	74,6	196	26273
1406,3	70,2	195	27788
1428,4	Rupture		
		Retrait moyen par gramme	0,0000028293.

Les allongemens et les retraits des fils de plomb paraissent se faire d'une manière fort-irrégulière, et il est très-difficile d'observer dans ces fils le retrait immédiat qui a lieu à l'instant où l'on diminue la tension, et de le distinguer du retrait lent par lequel le fil continue longtems à revenir vers sa longueur primitive: parmi plusieurs expériences que j'ai faites sur ce métal, je n'en rapporterai qu'une seule où ces irrégularités sont un peu moins grandes, et qui, ainsi que les expériences sur les hélices, paraît indiquer que pour le plomb comme pour les autres métaux, le retrait immédiat ou instantané, est proportionnel à la diminution correspondante de la tension: d'après cette expérience, un fil de plomb de $0^{mm},605$ de rayon, se raccourcit de 0,000000433 de sa longueur primitive, pour chaque gramme dont sa tension diminue; deux autres expériences faites sur des fils du même rayon, donnent pour valeur moyenne de ce retrait les fractions 0,000000391, et 0,000000452: en prenant la moyenne de ces trois valeurs, on trouverait pour E le nombre $2351^{kil.}$ par millimètre carré. La moyenne des valeurs trouvées par les hélices n'est que de $1909^{kil.}$.

EXPÉRIENCE NEUVIÈME

Fil de plomb.

Tension totale	Diminution de la tension	Retrait instantané en parties de la longueur primitive	Rapport du retrait à la diminution de la tension
1256,9 gr.	667,8 gr.	0,000260	0,0000038934
1405,3	480,0	235	48958
1453,2	371,5	176	47376
1500,5	306,5	137	44692
1536,5	262,4	075	28582 (*)
1576,5	460,5	172	37351
1607,2	408,9	173	42412

Retrait moyen par gramme en omettant le 5.e résultat . . . } = 0,0000043278.

Je n'ai fait aucune expérience directe sur les allongemens et le retrait des fils d'étain et d'argent.

NOTE B.

Sur le retrait instantané des hélices de cuivre, qui ont soutenu l'action d'une charge pendant un temps plus ou moins long.

Quelques expériences qui n'étaient que commencées lors de la rédaction de ce mémoire, me permettent aujourd'hui d'affirmer que la quantité dont un ressort revient instantanément vers sa longueur primitive lorsqu'on le décharge d'une partie du poids qui le tenait tendu, est la même soit que l'action du poids n'ait duré que quelques secondes, soit qu'elle se soit prolongée pendant plusieurs mois, quoique l'allongement total du ressort soit allé continuellement en augmentant pendant cet intervalle de tems, et soit par conséquent beaucoup plus considérable dans le second cas que dans le premier. Ces expériences ont été faites sur cinq hélices de cuivre, formées d'un fil de $0^{mm},71175$ de rayon.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE

Rayon de l'hélice $a = 13^{mm},1597$; Nombre des spires $n = 37$;

Charge totale = 69 grammes.

Durée de l'action de la charge	Diminution de la charge	Retrait instantané correspondant
		mm
Quelques secondes	50	14,7
6 jours	»	15,0
142 jours	»	14,9
	Moyenne	$14^{mm},867$.

EXPÉRIENCE DEUXIÈME

Rayon de l'hélice $a = 13^{mm},1108$; Nombre des spires $n = 49$;
Charge totale 169 grammes.

Durée de l'action de la charge	Diminution de la charge	Retrait instantané correspondant	Retrait instantané pour 100 grammes
	gr.	mm	mm
Quelques secondes	40	15,5	38,75
6 jours	100	39,5	39,50
142 jours	100	39,0	39,00
		Moyenne	$39^{mm},08$.

EXPÉRIENCE TROISIÈME

Rayon de l'hélice $a = 13^{mm},0658$; Nombre des spires $n = 49$;
Charge totale 219 grammes.

Durée de l'action de la charge	Diminution de la charge	Retrait instantané correspondant	Retrait instantané pour 100 grammes
	gr.	mm	mm
Quelques secondes	40	15,6	39,00
6 jours	100	39,5	39,50
37 jours	200	79,5	39,75
142 jours	200	78,5	39,25
		Moyenne	$39^{mm},375$.

EXPÉRIENCE QUATRIÈME

Rayon de l'hélice $a = 13^{mm},0658$; Nombre des spires $n = 49$;
Charge totale = 39 grammes.

Durée de l'action de la charge	Diminution de la charge	Retrait instantané correspondant	Retrait instantané pour 100 grammes
	gr.	mm	mm
Quelques secondes	29	11,75	40,51
32 jours	20	8,00	40,00
137 jours	20	8,00	40,00
		Moyenne	$40^{mm},17$.

EXPÉRIENCE CINQUIÈME

Rayon de l'hélice $a = 13,0658$; Nombre des spires $n = 49$;
Charge totale 219 grammes.

Durée de l'action de la charge	Diminution de la charge	Retrait instantané correspondant	Retrait instantané pour 100 grammes
	gr.	mm	mm
Quelques secondes	58	22,0	37,93
8 jours	200	79,0	39,50
32 jours	200	76,5	38,25
137 jours	200	76,0	38,00
		Moyenne	$38^{mm},42$.

Ces cinq expériences donnent pour E les valeurs

$11125^{kil.}$, $10999^{kil.}$, $10928^{kil.}$, $10337^{kil.}$, $10808^{kil.}$,

dont la moyenne $10839^{kil.}$, s'écarte fort peu de celle du VI.e Tableau.

IRR 345

R. Un
IST